## 問題 1.10　粗い斜面への斜衝突

水平に対する傾きの角が30°の斜面上に，点Oを原点として，最大傾斜の方向・下向きに$x$軸，斜面に垂直方向・上向きに$y$軸をとる。

原点Oから質量$m$の物体を水平方向へ初速$v$で投げ出したところ，物体は$xy$面内で運動し，やがて斜面に落下し，はね返ることなく斜面を滑り降りた。重力加速度を$g$，物体と斜面の間の動摩擦係数を$\dfrac{1}{3}$として，以下の設問に答えよ。

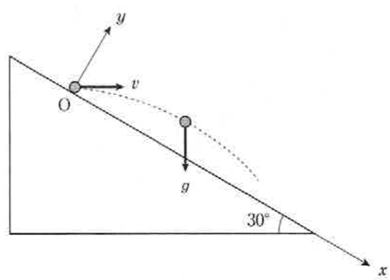

図1

(1)(イ)　物体が原点Oで投げ出されてから，斜面に落下するまでの時間を求めよ。

(ロ)　落下点の$x$座標を求めよ。

(ハ)　落下直前において，物体の速度の方向が斜面に対してなす角の正接を求めよ。

(2)(イ)　斜面に衝突後，物体が滑り出す速さを$u$，衝突中の垂直抗力の大きさを$N$，衝突時間を$\Delta t$とする。衝突の直前と直後の運動量の変化と力積の関係を$x$方向と$y$方向に分けて表せ。ただし，$\Delta t$は十分に小さくて，衝突中の重力の力積は無視できるものとする。

(ロ)　物体が滑り出す速さ$u$を求めよ。

(3)　この物体は斜面との衝突で，$I_0$より大きい運動量変化が起こると破壊される。破壊されずに落下できる$v$の最大値$v_m$を求めよ。　　(関西学院大　改)

**Point**

物体が粗い面に衝突すると，物体と面の間にはたらく動摩擦力のため，面に平行な速度成分が小さくなる。このことを，運動量と力積の関係から明確に理解しよう。

(1)　物体は投げ出されているとき，$x$方向へ $g\sin 30°$，$y$方向へ $-g\cos 30°$ の等加速度運動をする(図2)。

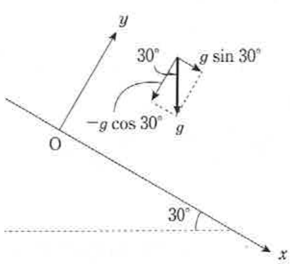

図2

(2)(ロ)　衝突直後の速度の$x$成分は，垂直抗力$N$を消去して求められる。

**解　答**

(1)(イ)　落下点の$y$座標は0であり，重力加速度の$y$成分は$-g\cos 30°$であるから，求める時間を$t_0$とすると，

$$0 = v\sin 30°\cdot t_0 - \frac{1}{2}g\cos 30°\cdot {t_0}^2$$

$$\therefore\quad t_0 = \underline{\frac{2\sqrt{3}v}{3g}}$$

(ロ)　重力加速度の$x$成分は$g\sin 30°$であるから，

$$x = v\cos 30°\cdot t_0 + \frac{1}{2}g\sin 30°\cdot {t_0}^2 = \underline{\frac{4v^2}{3g}}$$

(ハ)　落下直前の速度の$x$成分を$v_x$，$y$成分を$v_y$とすると，

$$v_x = v\cos 30° + g\sin 30°\cdot t_0 = \frac{5\sqrt{3}}{6}v$$

$$v_y = v\sin 30° - g\cos 30°\cdot t_0 = -\frac{v}{2}$$

求める角を$\theta$として(図3)，

$$\tan\theta = \frac{|v_y|}{v_x} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{5}}$$

(2)(イ)　運動量変化=力積の関係式は，動摩擦力の大きさが$\dfrac{1}{3}N$と書けるから(図3)，

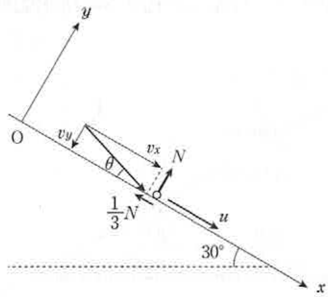


図3

$$x\text{ 方向}：mu-mv_x=-\frac{1}{3}N\varDelta t$$

$$\therefore\quad mu-\frac{5\sqrt{3}}{6}mv=-\frac{1}{3}N\varDelta t \qquad \cdots\cdots①$$

$$y\text{ 方向}：0-mv_y=N\varDelta t$$

$$0-\left(-\frac{1}{2}mv\right)=N\varDelta t \qquad \cdots\cdots②$$

(ロ) ①，②式より $N\varDelta t$ を消去して，

$$u=\frac{5\sqrt{3}-1}{6}v$$

(3) 衝突による運動量変化の $x$ 成分を $I_x$，$y$ 成分を $I_y$ とすると，

$$I_x=mu-\frac{5\sqrt{3}}{6}mv=-\frac{1}{6}mv$$

$$I_y=0-\left(-\frac{1}{2}mv\right)=\frac{1}{2}mv$$

物体が破壊されないためには，

$$I_0\geqq\sqrt{I_x^2+I_y^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}mv$$

$$\therefore\quad v_m=\frac{3\sqrt{10}I_0}{5m}$$

解 説

**摩擦のある面との衝突**

物体が粗い面に衝突すると，衝突の瞬間，面上をわずかに滑る。滑っている間に物体に面から動摩擦力がはたらき，動摩擦力の力積の分だけ，物体の運動量の面に平行な成分が変化する。

図4のように，水平な粗い面に速度の水平成分（$x$ 成分）$v_x$，鉛直成分（$y$ 成分）$v_y$ をもった質量 $m$ の小球が衝突し，衝突直後，速度の $x$ 成分が $v_x'$，$y$ 成分が $v_y'$ になったとする。物体と水平面のはね返り係数を $e$ とすると，

$$v_y'=-ev_y$$

の関係が成り立つ。

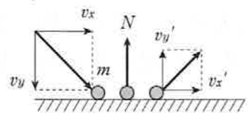


図4

一方，水平面から小球にはたらく垂直抗力の大きさ $N$ は，図5のように時間と共に変化する。ここで，衝突時間を $\varDelta t$ とする。一般に，垂直抗力の大きさ $N$ は，小球にはたらく重力の大きさ $mg$ に比べて十分に大きい。水平面から小球にはたらく動摩擦力の大きさは，動摩擦係数を $\mu$ とすると，$\mu N$ と書けるから，衝突前後で小球の「運動量変化＝力積」の式を $x$ 成分と $y$ 成分について，重力の力積を無視して書くと，

$$mv_x'-mv_x=\int_t^{t+\varDelta t}(-\mu N)\,dt=-\mu\int_t^{t+\varDelta t}N\,dt$$

$$mv_y'-mv_y=\int_t^{t+\varDelta t}N\,dt$$

となる。よって，

$$\begin{aligned}mv_x'-mv_x&=-\mu(mv_y'-mv_y)\\&=(1+e)\mu mv_y \qquad \cdots\cdots③\end{aligned}$$

と書くことができ，水平方向の運動量変化は，はね返り係数 $e$ を用いて表すことができることがわかる。

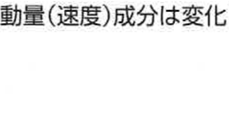


図5

また，③式から，**面がなめらかな（$\mu=0$）とき，面に平行な運動量（速度）成分は変化しない**こともわかる。